

Fonction sinus en double précision avec arrondi correct (stage L3)

Encadrant. Paul Zimmermann (INRIA Nancy - Grand Est).

Contexte. Le standard IEEE 754 définit ce qu'on appelle l'« arrondi correct ». Étant donné une fonction mathématique f et un nombre flottant x , l'arrondi correct de $f(x)$ est le nombre flottant y le plus proche de $f(x)$ selon le mode d'arrondi donné (au plus proche, vers zéro, vers $-\infty$ ou vers $+\infty$). Si le standard IEEE 754 impose l'arrondi correct pour les quatre opérations arithmétiques de base (addition, soustraction, multiplication, division) et la racine carrée, il ne fait que le recommander pour les fonctions mathématiques (exp, sin, pow, ...) Les bibliothèques mathématiques couramment utilisées ne garantissent pas l'arrondi correct [2]. Le projet CORE-MATH [4] vise à produire des implantations avec arrondi correct, en vue d'une intégration dans ces bibliothèques mathématiques.

Objectif du stage. L'objectif du stage est d'inventer un algorithme efficace calculant l'arrondi correct pour la fonction sinus en double précision, et d'implanter cet algorithme en langage C. L'une des difficultés est la réduction d'argument : le format double précision contient des nombres allant jusque 2^{1024} , qu'il faut réduire correctement modulo 2π pour calculer leur sinus. Pour éviter des calculs en précision arbitraire, une solution est de se ramener à la fonction `sinpi` qui calcule le sinus de πx [3]. Une autre difficulté est que pour obtenir un code efficace, il est nécessaire d'avoir une borne sur le nombre maximal de suites de 0 ou 1 consécutifs après le bit d'arrondi, ce qui correspond aux « pires cas ». Pour la fonction sinus, les meilleurs algorithmes connus ne permettent pas d'avoir une borne effective en double précision [1]. Il faudra donc proposer une approche pragmatique qui permette d'allier efficacité et arrondi correct. L'implantation en C sera proposée dans le cadre du projet CORE-MATH pour intégration aux bibliothèques mathématiques existantes (GNU libc, Intel Math Library, AMD LibM, ...)

Prérequis. Ce stage nécessite de solides connaissances mathématiques, ainsi qu'une bonne maîtrise du langage C.

Références

- [1] HANROT, G., LEFÈVRE, V., STEHLÉ, D., AND ZIMMERMANN, P. Worst cases of a periodic function for large arguments. In *Proceedings of the 18th IEEE Symposium on Computer Arithmetic (ARITH'18)* (Montpellier, France, 2007), P. Kornerup and J.-M. Muller, Eds., IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, pp. 133–140.
- [2] INNOCENTE, V., AND ZIMMERMANN, P. Accuracy of mathematical functions in single, double, extended double and quadruple precision. <https://members.loria.fr/PZimmermann/papers/accuracy.pdf>, 2022. Version of February 11, 21 pages.
- [3] MARKSTEAIN, P. *IA-64 and Elementary Functions*. Hewlett-Packard Professional Books, 2000.
- [4] SIBIDANOV, A., ZIMMERMANN, P., AND GLONDU, S. The CORE-MATH Project. In *ARITH 2022 - 29th IEEE Symposium on Computer Arithmetic* (virtual, France, Sept. 2022). <https://hal.inria.fr/hal-03721525>.