Arithmétique modulaire pour la cryptographie

Thomas Plantard

Projet Arith
LIRMM — Université Montpellier II — UMR 5506
106 rue Ada
34592 Montpellier — Cedex 5

web : http://www.lirmm.fr/~plantard/
email : plantard@lirmm.fr

Le 15 décembre 2005

Le contexte cryptographique

La cryptographie à clé privée

Alice

m 1010100010011

Bob

Le contexte cryptographique

La cryptographie à clé privée

Alice

m 1010100010011
k 0110110101001

Bob

k 0110110101001

Le contexte cryptographique

La cryptographie à clé privée

Alice

m	1010100010011
k	0110110101001
$c = m \otimes k$	1100010111010

Bob

k	0110110101001

Le contexte cryptographique

La cryptographie à clé privée

Alice

m	1010100010011
k	0110110101001
$c = m \otimes k$	1100010111010

Bob

c	1100010111010
k	0110110101001

Le contexte cryptographique

La cryptographie à clé privée

Alice

m	1010100010011
k	0110110101001
$c = m \otimes k$	1100010111010

Bob

c	1100010111010
k	0110110101001
$m = c \otimes k$	1010100010011

Le contexte cryptographique

La cryptographie à clé privée

Alice

m	1010100010011
k	0110110101001
$c = m \otimes k$	1100010111010

Bob

c	1100010111010
k	0110110101001
$m = c \otimes k$	1010100010011

La cryptographie à clé publique

Clé publique : g, p

Alice

Clé privée : a

1. Alice calcule $g^a \bmod p$
2. Alice envoie à Bob g^a
3. Alice calcule $k = (g^b)^a \bmod p$

Bob

Clé privée : b

1. Bob calcule $g^b \bmod p$
2. Bob envoie à Alice g^b
3. Bob calcule $k = (g^a)^b \bmod p$

Clé commune $k = g^{ab} \bmod p$

Plan du mémoire

1. Besoins arithmétiques en cryptographie
2. État de l'art sur l'arithmétique modulaire
3. Systèmes de représentation adaptés
4. Arithmétique modulaire pour de petits moduli

Arithmétique Modulaire pour la Cryptographie

Plan de l'exposé

Les opérations arithmétiques de la cryptographie à clé publique

L'échange de clé de Diffie Hellman (1970)

- Une exponentiation sur le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
- Opération : Multiplication modulo p (premier)
- Sécurité : 2^{80} opérations $\Rightarrow$ 1024 bits, $2^{112} \Rightarrow$ 2048 bits ...

Les opérations arithmétiques de la cryptographie à clé publique

L'échange de clé de Diffie Hellman (1970)

- Une exponentiation sur le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
- Opération : Multiplication modulo p (premier)
- Sécurité : 2^{80} opérations $\Rightarrow$ 1024 bits, $2^{112} \Rightarrow$ 2048 bits ...

RSA, Rivest, Shamir et Adleman (1978)

- Une exponentiation sur l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Opération : Multiplication modulo n (composé)
- Sécurité : 2^{80} opérations $\Rightarrow$ 1024 bits, $2^{112} \Rightarrow$ 2048 bits ...

Les opérations arithmétiques de la cryptographie à clé publique

L'échange de clé de Diffie Hellman (1970)

- Une exponentiation sur le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
- Opération : Multiplication modulo p (premier)
- Sécurité : 2^{80} opérations $\Rightarrow$ 1024 bits, $2^{112} \Rightarrow$ 2048 bits ...

RSA, Rivest, Shamir et Adleman (1978)

- Une exponentiation sur l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Opération : Multiplication modulo n (composé)
- Sécurité : 2^{80} opérations $\Rightarrow$ 1024 bits, $2^{112} \Rightarrow$ 2048 bits ...

ECC, Koblitz et Miller (1985)

- Une exponentiation sur le groupe des points d'une courbe elliptique
- Opération : Inversion, Addition, Multiplication modulo p (premier)
- Sécurité : 2^{80} opérations $\Rightarrow$ 160 bits, $2^{112} \Rightarrow$ 224 bits ...

La multiplication modulaire

Multiplication Modulaire

- Entrée : a, b et p tel que $0 \leq a, b < p < 2^n$
- Sortie : $r = ab + qp$ tel que $0 \leq r, q < p$

Multiplications modulaires généralistes

- Taylor, 1981 : Mémorisation de la mise au carré modulaire.
- Blakley, 1983 : "Double and Add" avec réduction à chaque étape.
- Montgomery, 1985 : Division par une puissance de la base.
- Barrett, 1986 : Approximation du quotient de la division.
- Takagi, 1992 : "Double and Add" en représentation redondante.

Moduli particuliers

- Trouver des moduli pour les tailles supérieures à 160 bits.
- Avec une réduction modulaire très efficace.

État de l'art

Les nombres de Mersenne

Mersenne, 1644

Les nombres de Mersenne

- Nombre premier p de la forme $p = 2^n - 1$

Réduction

- $2^n \equiv 1 \pmod{p}$
- $a = a_1 2^n + a_0$
- $a \equiv a_1 + a_0 \pmod{p}$

$p = 31 = 2^5 - 1$, $a = 273$

- $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$
- $a = 8 \times 2^5 + 17$
- $a \equiv 8 + 17 = 25 \pmod{31}$

- Coût = Deux Additions de n bits

Les inconvénients des nombres de Mersenne

Si $p = \beta^n - 1$ premier alors $\beta = 2$

- $\beta^n - 1 = (\beta - 1)(\beta^{n-1} + ... + 1)$
- Si $\beta > 2$ alors $(\beta - 1) > 1$ divise p

n premier

- Si n pas premier alors $n = uv$ avec $u, v \geq 2$
- $p = 2^n - 1 = 2^{uv} - 1 = (2^u)^v - 1 = \beta^v - 1$ alors p pas premier

Les nombres de Mersenne pour la cryptographie

- Impossible pour les tailles cryptographiques $160, 192, 224, ...$
- $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607$
- Le *NIST* et le *SEC* conseillent le nombre de Mersenne $2^{521} - 1$

Les Pseudo nombres de Mersenne

Crandall, 1992

Les Pseudo nombres de Mersenne

- Nombre premier p
- $p = 2^n - c$ avec $c < 2^{\frac{n}{2}}$

Exemple

- $n = 10$
- $c = 3$
- $p = 1021$

Réduction

1. $a = a_1 2^n + a_0$
2. $a \leftarrow a_1 c + a_0$
3. $a = a_1 2^n + a_0$
4. $a \leftarrow a_1 c + a_0$

Le coût

- 2 Multiplications de $\frac{n}{2}$ bits
- 4 Additions de $\frac{n}{2}$ bits

Les Pseudo nombres de Mersenne pour la cryptographie

Une bonne densité

Les Pseudo nombres de Mersenne premiers

n	160	192	224	256	288	320
$\lvert c \rvert_2$	6	8	6	8	8	8
	352	384	416	448	480	512
	10	9	9	8	6	10

Les Pseudo nombres de Mersenne pour ECC

1. $secp_{160k1} = 2^{160} - (2^{32} + 2^{14} + 2^{12} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^3 + 2^2 + 1)$
2. $secp_{192k1} = 2^{192} - (2^{32} + 2^{12} + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^3 + 1)$
3. $secp_{224k1} = 2^{224} - (2^{32} + 2^{12} + 2^{11} + 2^9 + 2^7 + 2^4 + 2 + 1)$
4. $secp_{256k1} = 2^{256} - (2^{32} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 1)$

Les nombres de Mersenne Généralisés

Solinas, 1999

Les nombres de Mersenne Généralisés

- Nombre p premier de la forme $p = P(2^k)$
- $P(X) = X^d - C(X)$ avec $Deg(C) \leq \frac{d}{2}$ et $C_i \in \{-1, 0, 1\}$

Un nombre de Mersenne Généralisé

- $P(X) = X^3 - X - 1$
- $P(2^3) = 8^3 - 8 - 1 = 503$

Coût

- $2d$ Additions de k bits

Les nombres de Mersenne Généralisés

Solinas, 1999

Les nombres de Mersenne Généralisés

- Nombre p premier de la forme $p = P(2^k)$
- $P(X) = X^d - C(X)$ avec $Deg(C) \leq \frac{d}{2}$ et $C_i \in \{-1, 0, 1\}$

Un nombre de Mersenne Généralisé

- $P(X) = X^3 - X - 1$
- $P(2^3) = 8^3 - 8 - 1 = 503$

Coût

- $2d$ Additions de k bits

Réduction

1. $A = A_1 X^d + A_0$
2. $A \leftarrow A_1 C + A_0$
3. $A = A_1 X^d + A_0$
4. $A \leftarrow A_1 C + A_0$

Les nombres de Mersenne Généralisés pour la cryptographie

Une densité quasi suffisante

Le nombre de nombres de Mersenne Généralisés avec $k = 32$

n	160	192	224	256	288	320
$\#MG$	0	1	1	0	0	1
	352	384	416	448	480	512
	3	2	8	8	13	22

Les nombres de Mersenne Généralisés pour la cryptographie

Une densité quasi suffisante

Le nombre de nombres de Mersenne Généralisés avec $k = 32$

n	160	192	224	256	288	320
$\#MG$	0	1	1	0	0	1
	352	384	416	448	480	512
	3	2	8	8	13	22

Les nombres de Mersenne Généralisés pour ECC

1. sec_{192r1} $P(X) = X^3 - (X + 1)$ en 2^{64}
2. sec_{224r1} $P(X) = X^7 - (X^3 + 1)$ en 2^{32}
3. sec_{256r1} $P(X) = X^8 - (X^7 - X^6 - X^3 + 1)$ en 2^{32}
4. sec_{384r1} $P(X) = X^{12} - (X^4 + X^3 - X + 1)$ en 2^{32}

Système de représentation

Système de représentation modulaire

Représentation classique en base β

$$a = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \beta^i \text{ with } a_i \in \{0, ...\beta - 1\}$$

Exemple : $A = 1315 = [2, 4, 4, 3]_8$ $A = 2 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 4 \times 8 + 3$

Système de représentation modulaire

Représentation classique en base β

$$a = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \beta^i \text{ with } a_i \in \{0, ...\beta - 1\}$$

Exemple : $A = 1315 = [2, 4, 4, 3]_8$ $A = 2 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 4 \times 8 + 3$

Représentation modulaire $\mathcal{B} = (p, n, \gamma, \rho)$

$$a = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \gamma^i \bmod p \text{ with } a_i \in \{0, \ldots, \rho - 1\}$$

Forme polynomiale

Le polynôme $A[X]$ représente a dans $\mathcal{B} = (p, n, \gamma, \rho)$ si

- $A[\gamma] \equiv a \pmod{p}$
- $Deg(A) \leq n$
- $\|A\|_\infty < \rho$

Exemple

- $(\gamma = 7, \rho = 3, n = 3, p = 17)$
- $a = \sum_{i=0}^{2} a_i 7^i \bmod 17$ with $a_i \in \{0, 1, 2\}$
- $7^0 = 1, 7^1 = 7, 7^2 \bmod 17 = 15$

0	1	2	3	4	5

6	7	8	9	10	11

12	13	14	15	16

Exemple

- $(\gamma = 7, \rho = 3, n = 3, p = 17)$
- $a = \sum_{i=0}^{2} a_i 7^i \bmod 17$ with $a_i \in \{0, 1, 2\}$
- $7^0 = 1, 7^1 = 7, 7^2 \bmod 17 = 15$

0	1	2	3	4	5
$[0,0,0]$	$[0,0,1]$	$[0,0,2]$			
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	

Exemple

- $(\gamma = 7, \rho = 3, n = 3, p = 17)$
- $a = \sum_{i=0}^{2} a_i 7^i \bmod 17$ with $a_i \in \{0, 1, 2\}$
- $7^0 = 1, 7^1 = 7, 7^2 \bmod 17 = 15$

0	1	2	3	4	5
$[0,0,0]$	$[0,0,1]$	$[0,0,2]$			
6	7	8	9	10	11
	$[0,1,0]$	$[0,1,1]$	$[0,1,2]$		
12	13	14	15	16	

Exemple

- $(\gamma = 7, \rho = 3, n = 3, p = 17)$
- $a = \sum_{i=0}^{2} a_i 7^i \bmod 17$ with $a_i \in \{0, 1, 2\}$
- $7^0 = 1, 7^1 = 7, 7^2 \bmod 17 = 15$

0	1	2	3	4	5
$[0,0,0]$	$[0,0,1]$	$[0,0,2]$			
6	7	8	9	10	11
	$[0,1,0]$	$[0,1,1]$	$[0,1,2]$		
12	13	14	15	16	
		$[0,2,0]$	$[0,2,1]$	$[0,2,2]$	

Exemple

- $(\gamma = 7, \rho = 3, n = 3, p = 17)$
- $a = \sum_{i=0}^{2} a_i 7^i \bmod 17$ with $a_i \in \{0, 1, 2\}$
- $7^0 = 1, 7^1 = 7, 7^2 \bmod 17 = 15$

0	1	2	3	4	5
$[0,0,0]$	$[0,0,1]$	$[0,0,2]$			$[1,1,0]$
6	7	8	9	10	11
$[1,1,1]$	$[0,1,0]$	$[0,1,1]$	$[0,1,2]$		
12	13	14	15	16	
$[1,2,0]$	$[1,2,1]$	$[0,2,0]$	$[0,2,1]$	$[0,2,2]$	

Exemple

- $(\gamma = 7, \rho = 3, n = 3, p = 17)$
- $a = \sum_{i=0}^{2} a_i 7^i \bmod 17$ with $a_i \in \{0, 1, 2\}$
- $7^0 = 1, 7^1 = 7, 7^2 \bmod 17 = 15$

0	1	2	3	4	5
$[0,0,0]$	$[0,0,1]$	$[0,0,2]$	$[2,1,1]$	$[2,1,2]$	$[1,1,0]$
6	7	8	9	10	11
$[1,1,1]$	$[0,1,0]$	$[0,1,1]$	$[0,1,2]$	$[2,2,0]$	$[2,2,1]$
12	13	14	15	16	
$[1,2,0]$	$[1,2,1]$	$[0,2,0]$	$[0,2,1]$	$[0,2,2]$	

Exemple

- $(\gamma = 7, \rho = 3, n = 3, p = 17)$
- $a = \sum_{i=0}^{2} a_i 7^i \bmod 17$ with $a_i \in \{0, 1, 2\}$
- $7^0 = 1, 7^1 = 7, 7^2 \bmod 17 = 15$

0	1	2	3	4	5
$[0,0,0]$	$[0,0,1]$	$[0,0,2]$	$[2,1,1]$	$[2,1,2]$	$[1,1,0]$
6	7	8	9	10	11
$[1,1,1]$	$[0,1,0]$	$[0,1,1]$	$[0,1,2]$	$[2,2,0]$	$[2,2,1]$
12	13	14	15	16	
$[1,2,0]$	$[1,2,1]$	$[0,2,0]$	$[0,2,1]$	$[0,2,2]$	

Question

- Si p, n et γ sont fixés, comment déterminer ρ_{min} ?
- Si p et n sont fixés, comment "bien" choisir γ ?

Comment trouver un "bon" système de représentation modulaire ?

Définition d'un système de représentation adapté

Un système de représentation modulaire $\mathcal{B} = (\gamma, \rho, n, p)$ sera dit *adapté* si

$$\gamma^n \bmod p = c$$

avec c "petit".

Comment trouver un "bon" système de représentation modulaire ?

Définition d'un système de représentation adapté

Un système de représentation modulaire $\mathcal{B} = (\gamma, \rho, n, p)$ sera dit *adapté* si

$$\gamma^n \bmod p = c$$

avec c "petit".

Multiplication Modulaire dans $\mathcal{B}$

1. Multiplication polynomiale dans $\mathbb{Z}[X]$: $U(X) \leftarrow A(X)\,B(X)$
2. Réduction polynomiale : $V(X) \leftarrow U(X) \bmod (X^n - c)$
3. Réduction des coefficients : $S \leftarrow CR(V)$, avec $S \equiv V(\gamma) \pmod P$

Exemple de système de représentation adapté

Un système de représentation adapté

- $p = 250043 \Rightarrow |p|_2 = 18$
- $n = 3$, $\rho = 128$
- $\gamma = 127006$ tel que $c = 2 = \gamma^3 \bmod p$

Entrée

- $A = 7 + 30X + 100X^2 \Rightarrow A = 65842$
- $B = 59 + 2X + 76X^2 \Rightarrow B = 8816$

Exemple de système de représentation adapté

Un système de représentation adapté

- $p = 250043 \Rightarrow |p|_2 = 18$
- $n = 3$, $\rho = 128$
- $\gamma = 127006$ tel que $c = 2 = \gamma^3 \bmod p$

Entrée

- $A = 7 + 30X + 100X^2 \Rightarrow A = 65842$
- $B = 59 + 2X + 76X^2 \Rightarrow B = 8816$

Multiplication Modulaire dans $\mathcal{B}$

1. $U(X) = A(X) \times B(X)$
   $U(X) = 413 + 1784X + 6492X^2 + 2480X^3 + 7600X^4$
2. $V(X) = U(X) \bmod (X^3 - 2) \leftarrow 5373 + 16984X + 6492X^2$
3. $S(X) = ?$

Exemple de système de représentation adapté

Un système de représentation adapté

- $p = 250043 \Rightarrow |p|_2 = 18$
- $n = 3$, $\rho = 128$
- $\gamma = 127006$ tel que $c = 2 = \gamma^3 \bmod p$

Entrée

- $A = 7 + 30X + 100X^2 \Rightarrow A = 65842$
- $B = 59 + 2X + 76X^2 \Rightarrow B = 8816$

Multiplication Modulaire dans $\mathcal{B}$

1. $U(X) = A(X) \times B(X)$
   $U(X) = 413 + 1784X + 6492X^2 + 2480X^3 + 7600X^4$
2. $V(X) = U(X) \bmod (X^3 - 2) \leftarrow 5373 + 16984X + 6492X^2$
3. $S(X) = ?$

Réduction des coefficients

Entrée

- Un vecteur V

Réduction des coefficients

1. $S \leftarrow V$
2. WHILE $\rho \geq s_i$ DO
   1. $t \leftarrow |S|_2$
   2. $S = S_1 2^{t-k_1} + S_0$
   3. $S_1 \leftarrow RED(S_1)$
   4. $S \leftarrow S_1 2^{t-k_1} + S_0$

Sortie

- Un vecteur $S \equiv V$
- Avec $s_i < \rho = 2^k$

Réduction des coefficients

Entrée

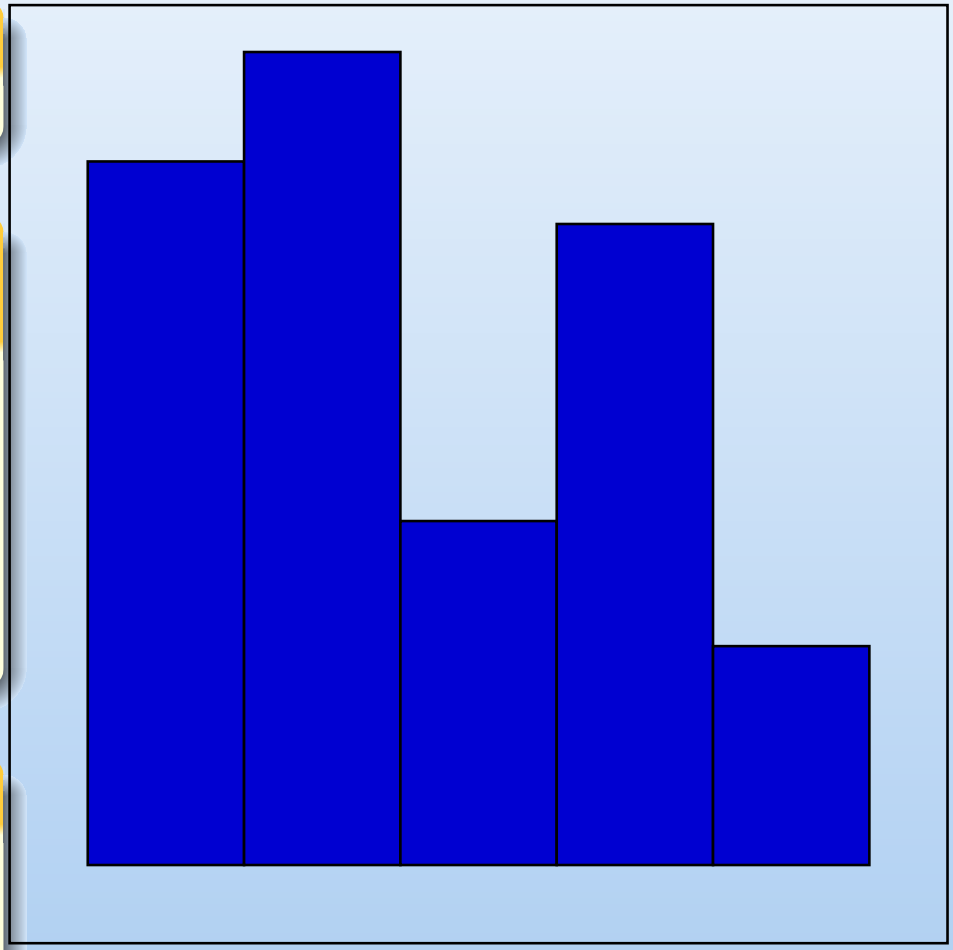
- Un vecteur V

Réduction des coefficients

1. $S \leftarrow V$
2. WHILE $\rho \geq s_i$ DO
   1. $t \leftarrow |S|_2$
   2. $S = S_1 2^{t-k_1} + S_0$
   3. $S_1 \leftarrow RED(S_1)$
   4. $S \leftarrow S_1 2^{t-k_1} + S_0$

Sortie

- Un vecteur $S \equiv V$
- Avec $s_i < \rho = 2^k$



Réduction des coefficients

Entrée

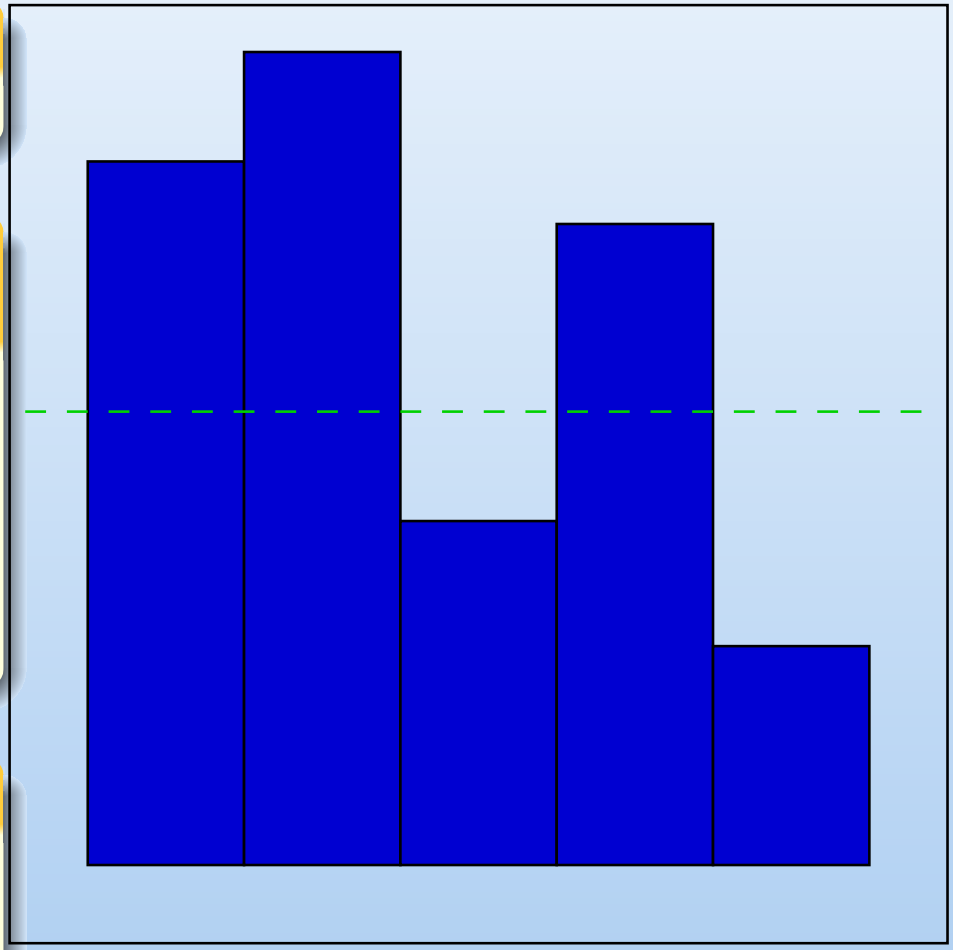
- Un vecteur V

Réduction des coefficients

1. $S \leftarrow V$
2. WHILE $\rho \geq s_i$ DO
   1. $t \leftarrow |S|_2$
   2. $S = S_1 2^{t-k_1} + S_0$
   3. $S_1 \leftarrow RED(S_1)$
   4. $S \leftarrow S_1 2^{t-k_1} + S_0$

Sortie

- Un vecteur $S \equiv V$
- Avec $s_i < \rho = 2^k$



Réduction des coefficients

Entrée

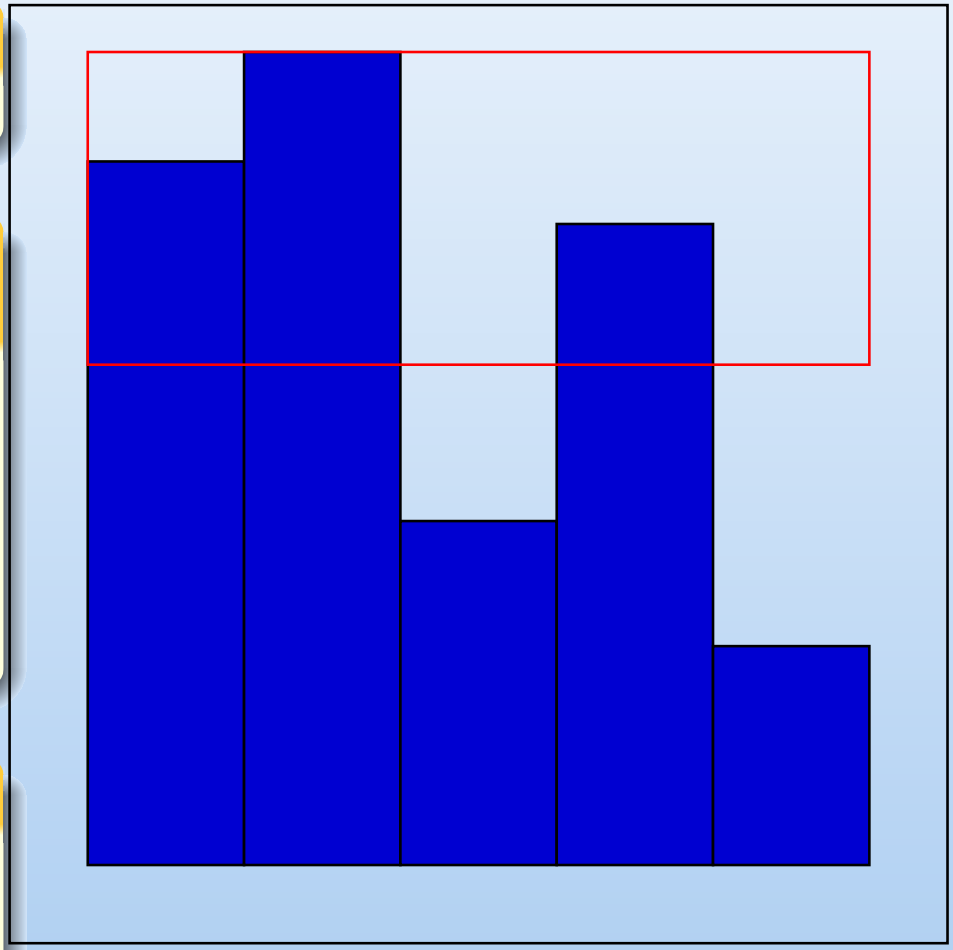
- Un vecteur V

Réduction des coefficients

1. $S \leftarrow V$
2. WHILE $\rho \geq s_i$ DO
   1. $t \leftarrow |S|_2$
   2. $S = S_1 2^{t-k_1} + S_0$
   3. $S_1 \leftarrow RED(S_1)$
   4. $S \leftarrow S_1 2^{t-k_1} + S_0$

Sortie

- Un vecteur $S \equiv V$
- Avec $s_i < \rho = 2^k$



Réduction des coefficients

Entrée

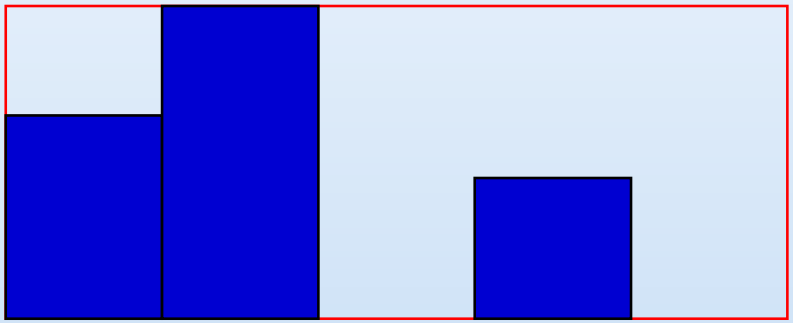
- Un vecteur V

Réduction des coefficients

1. $S \leftarrow V$
2. WHILE $\rho \geq s_i$ DO
   1. $t \leftarrow |S|_2$
   2. $S = S_1 2^{t-k_1} + S_0$
   3. $S_1 \leftarrow RED(S_1)$
   4. $S \leftarrow S_1 2^{t-k_1} + S_0$

Sortie

- Un vecteur $S \equiv V$
- Avec $s_i < \rho = 2^k$



Réduction des coefficients

Entrée

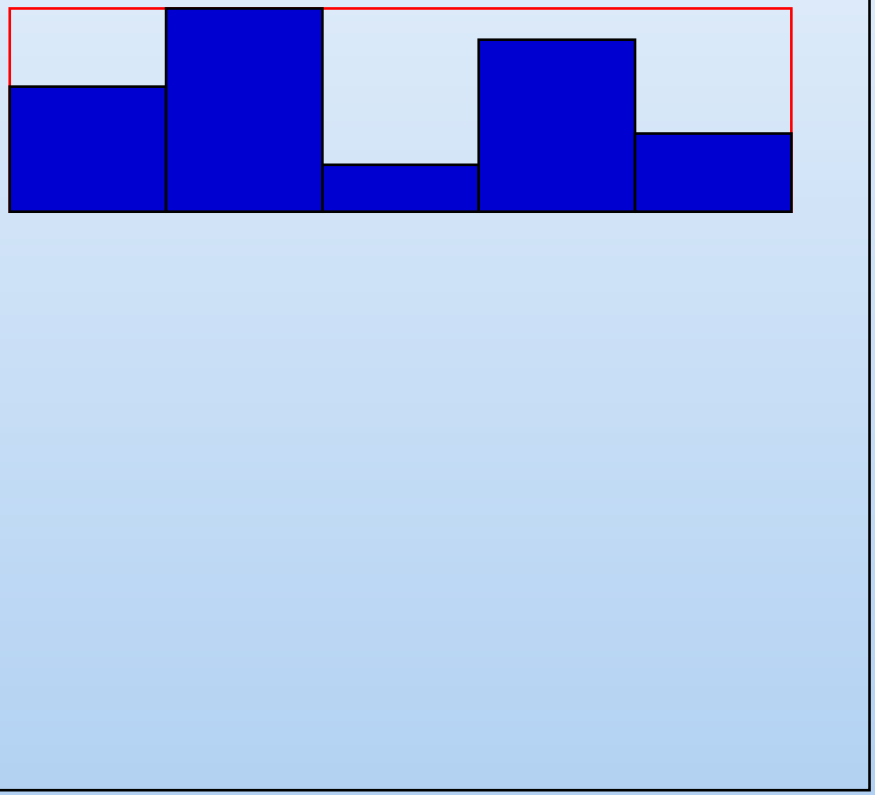
- Un vecteur V

Réduction des coefficients

1. $S \leftarrow V$
2. WHILE $\rho \geq s_i$ DO
   1. $t \leftarrow |S|_2$
   2. $S = S_1 2^{t-k_1} + S_0$
   3. $S_1 \leftarrow RED(S_1)$
   4. $S \leftarrow S_1 2^{t-k_1} + S_0$

Sortie

- Un vecteur $S \equiv V$
- Avec $s_i < \rho = 2^k$



Réduction des coefficients

Entrée

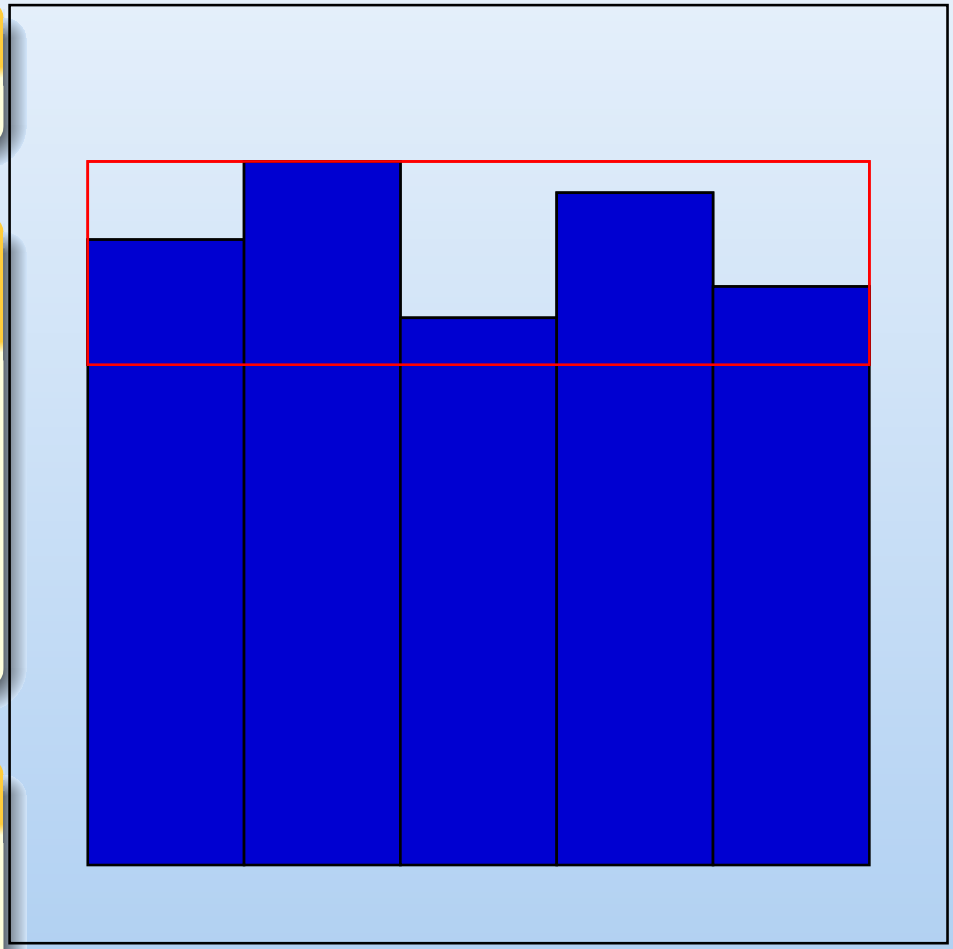
- Un vecteur V

Réduction des coefficients

1. $S \leftarrow V$
2. WHILE $\rho \geq s_i$ DO
   1. $t \leftarrow |S|_2$
   2. $S = S_1 2^{t-k_1} + S_0$
   3. $S_1 \leftarrow RED(S_1)$
   4. $S \leftarrow S_1 2^{t-k_1} + S_0$

Sortie

- Un vecteur $S \equiv V$
- Avec $s_i < \rho = 2^k$



Réduction des coefficients

Entrée

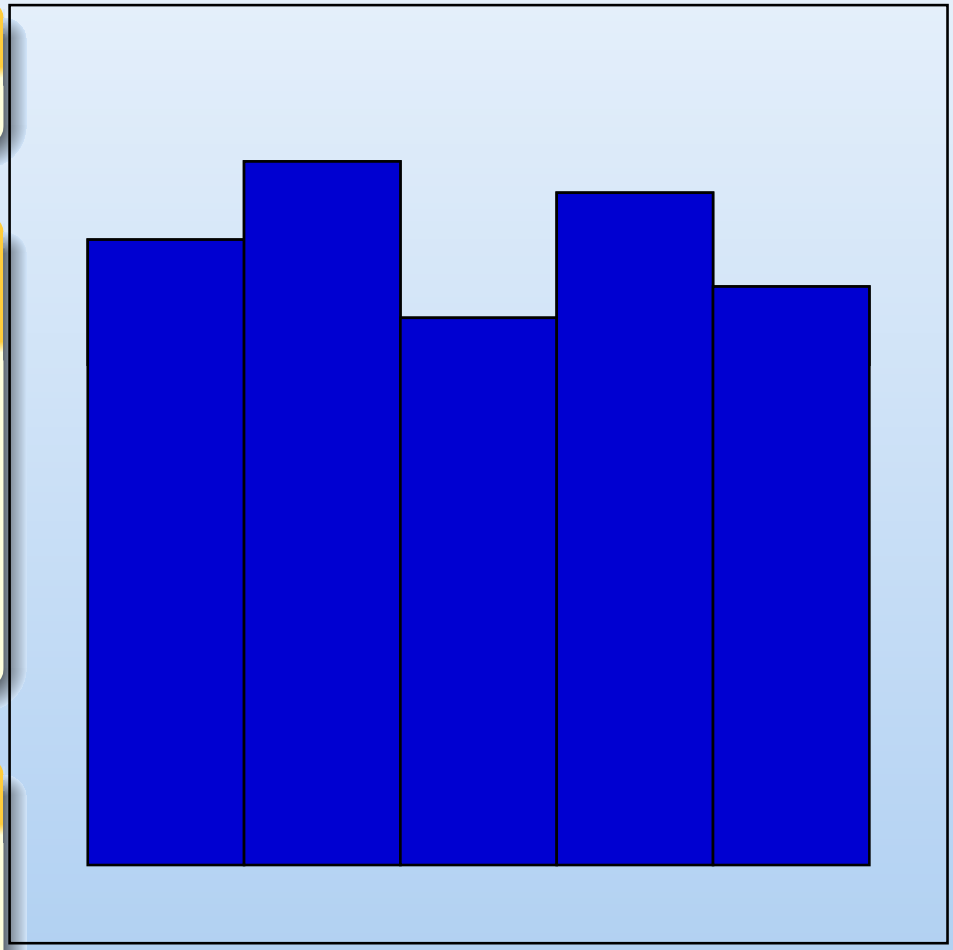
- Un vecteur V

Réduction des coefficients

1. $S \leftarrow V$
2. WHILE $\rho \geq s_i$ DO
   1. $t \leftarrow |S|_2$
   2. $S = S_1 2^{t-k_1} + S_0$
   3. $S_1 \leftarrow RED(S_1)$
   4. $S \leftarrow S_1 2^{t-k_1} + S_0$

Sortie

- Un vecteur $S \equiv V$
- Avec $s_i < \rho = 2^k$



Réduction des coefficients

Entrée

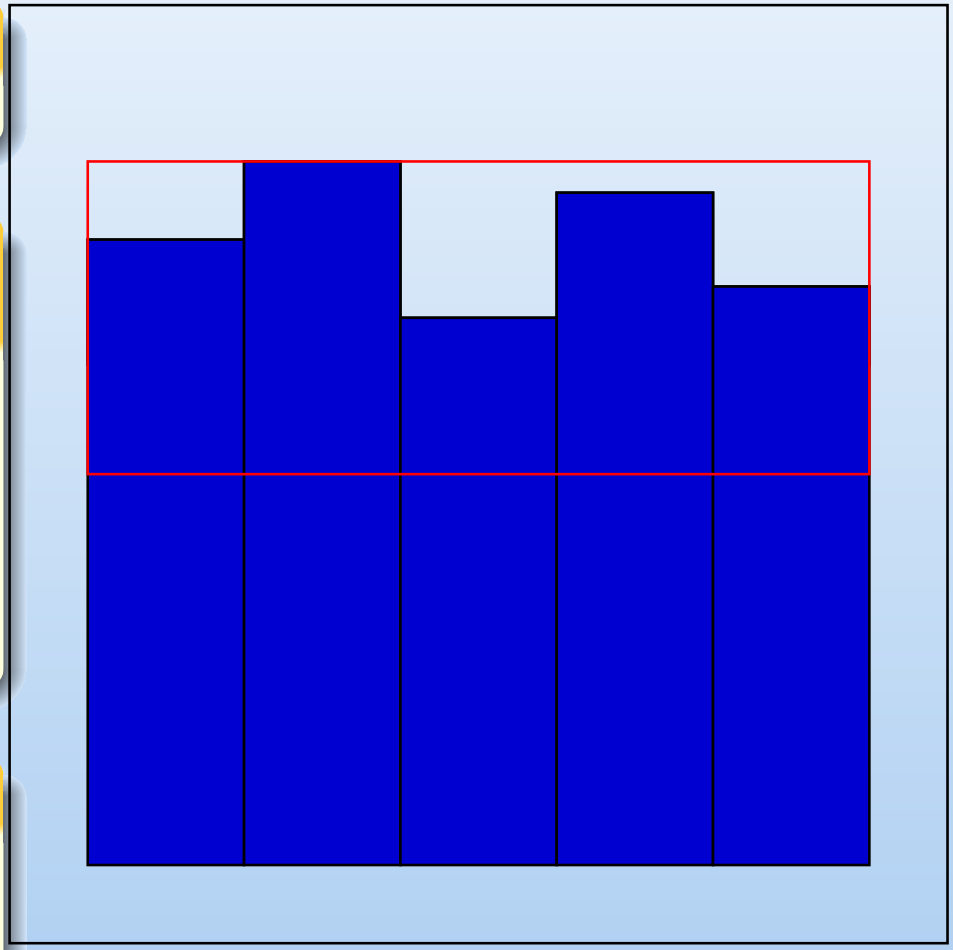
- Un vecteur V

Réduction des coefficients

1. $S \leftarrow V$
2. WHILE $\rho \geq s_i$ DO
   1. $t \leftarrow |S|_2$
   2. $S = S_1 2^{t-k_1} + S_0$
   3. $S_1 \leftarrow RED(S_1)$
   4. $S \leftarrow S_1 2^{t-k_1} + S_0$

Sortie

- Un vecteur $S \equiv V$
- Avec $s_i < \rho = 2^k$



Réduction des coefficients

Entrée

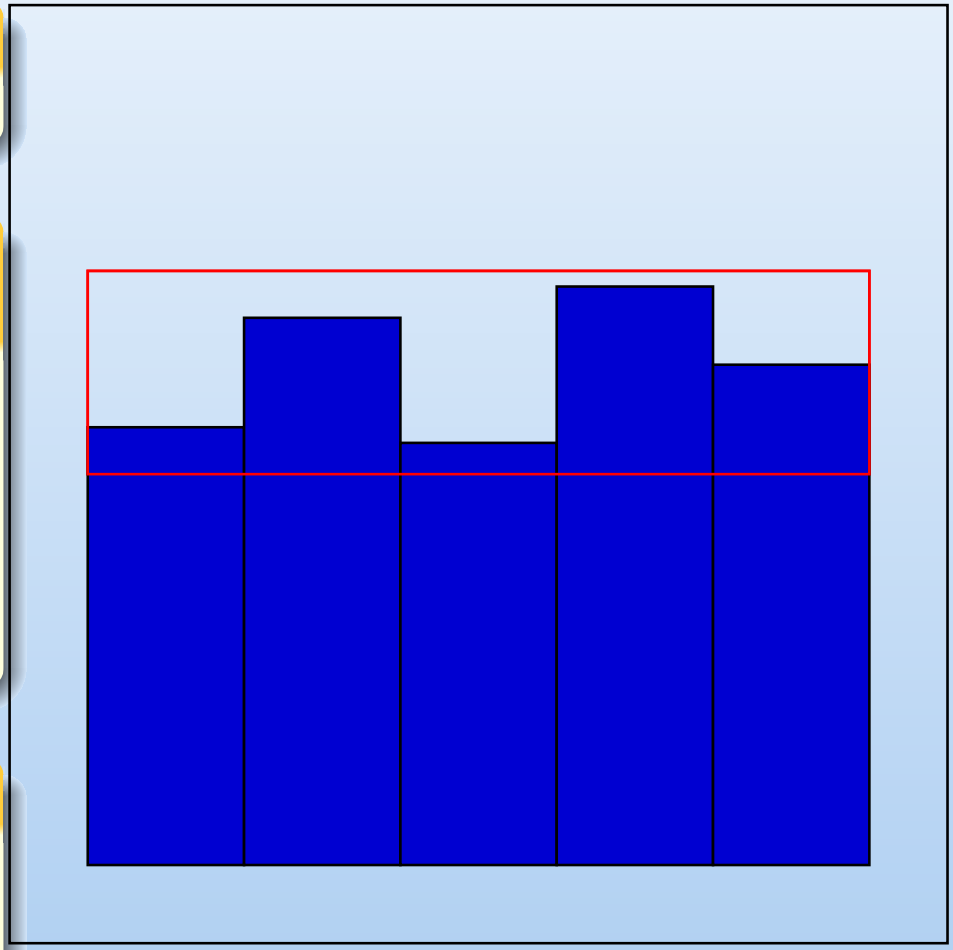
- Un vecteur V

Réduction des coefficients

1. $S \leftarrow V$
2. WHILE $\rho \geq s_i$ DO
   1. $t \leftarrow |S|_2$
   2. $S = S_1 2^{t-k_1} + S_0$
   3. $S_1 \leftarrow RED(S_1)$
   4. $S \leftarrow S_1 2^{t-k_1} + S_0$

Sortie

- Un vecteur $S \equiv V$
- Avec $s_i < \rho = 2^k$



Réduction des coefficients

Entrée

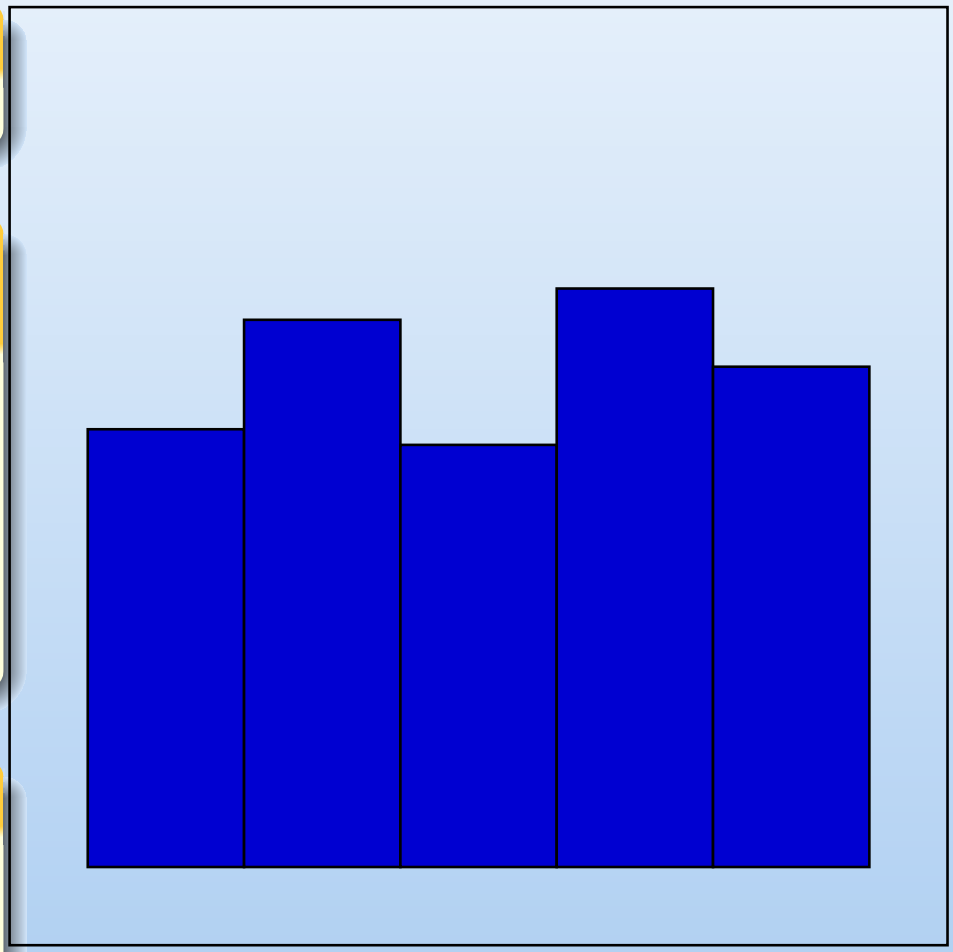
- Un vecteur V

Réduction des coefficients

1. $S \leftarrow V$
2. WHILE $\rho \geq s_i$ DO
   1. $t \leftarrow |S|_2$
   2. $S = S_1 2^{t-k_1} + S_0$
   3. $S_1 \leftarrow RED(S_1)$
   4. $S \leftarrow S_1 2^{t-k_1} + S_0$

Sortie

- Un vecteur $S \equiv V$
- Avec $s_i < \rho = 2^k$



Réduction des coefficients

Entrée

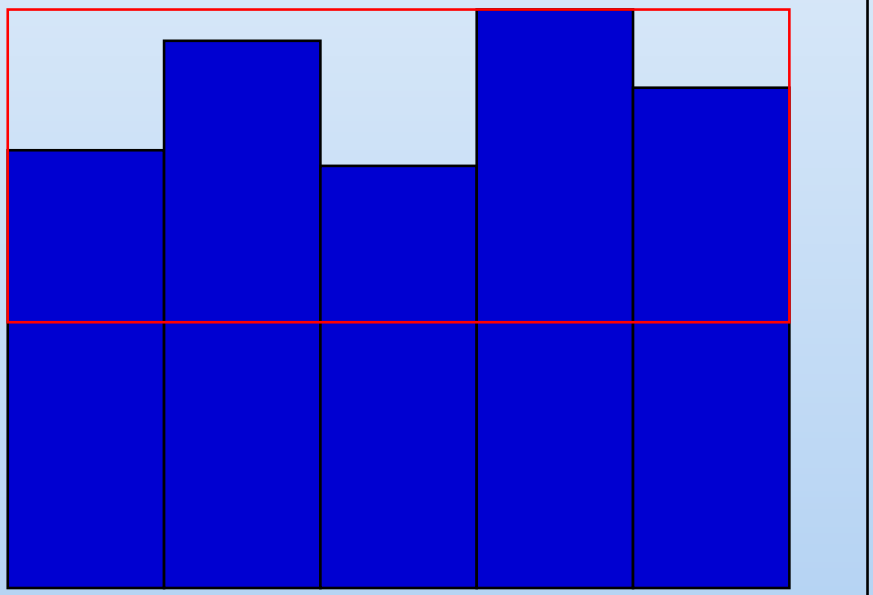
- Un vecteur V

Réduction des coefficients

1. $S \leftarrow V$
2. WHILE $\rho \geq s_i$ DO
   1. $t \leftarrow |S|_2$
   2. $S = S_1 2^{t-k_1} + S_0$
   3. $S_1 \leftarrow RED(S_1)$
   4. $S \leftarrow S_1 2^{t-k_1} + S_0$

Sortie

- Un vecteur $S \equiv V$
- Avec $s_i < \rho = 2^k$



Réduction des coefficients

Entrée

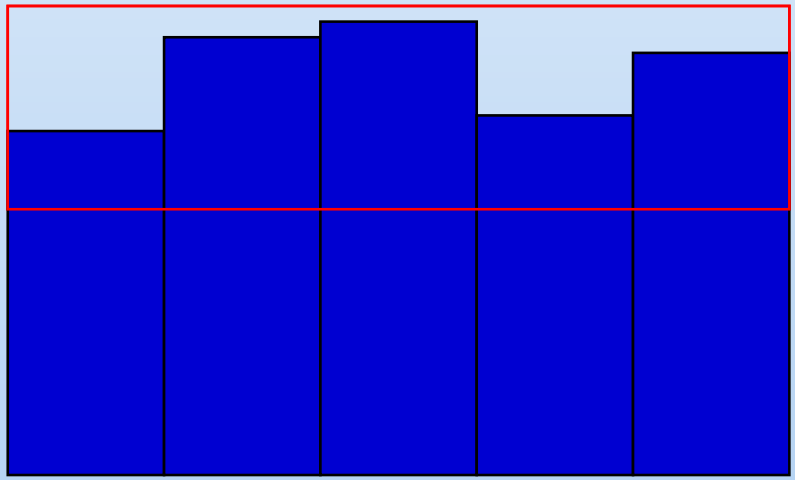
- Un vecteur V

Réduction des coefficients

1. $S \leftarrow V$
2. WHILE $\rho \geq s_i$ DO
   1. $t \leftarrow |S|_2$
   2. $S = S_1 2^{t-k_1} + S_0$
   3. $S_1 \leftarrow RED(S_1)$
   4. $S \leftarrow S_1 2^{t-k_1} + S_0$

Sortie

- Un vecteur $S \equiv V$
- Avec $s_i < \rho = 2^k$



Réduction des coefficients

Entrée

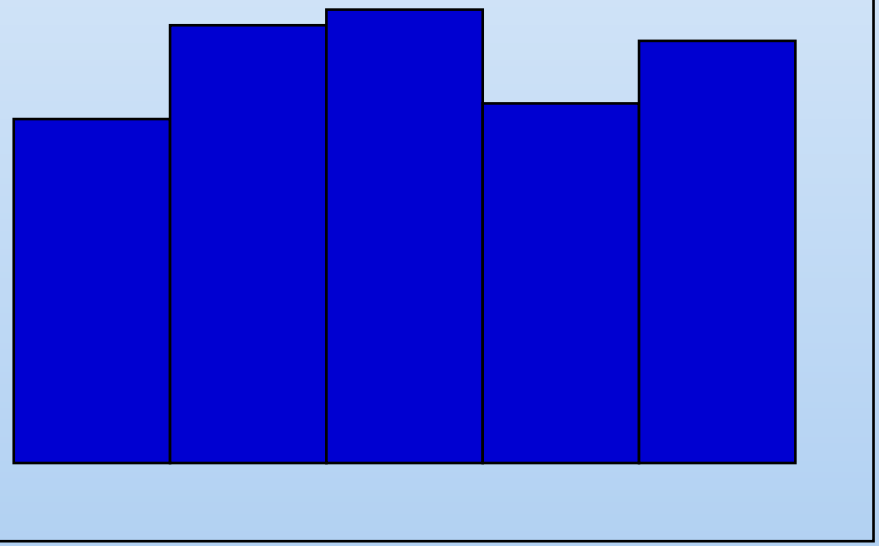
- Un vecteur V

Réduction des coefficients

1. $S \leftarrow V$
2. WHILE $\rho \geq s_i$ DO
   1. $t \leftarrow |S|_2$
   2. $S = S_1 2^{t-k_1} + S_0$
   3. $S_1 \leftarrow RED(S_1)$
   4. $S \leftarrow S_1 2^{t-k_1} + S_0$

Sortie

- Un vecteur $S \equiv V$
- Avec $s_i < \rho = 2^k$



Réduction des coefficients

Entrée

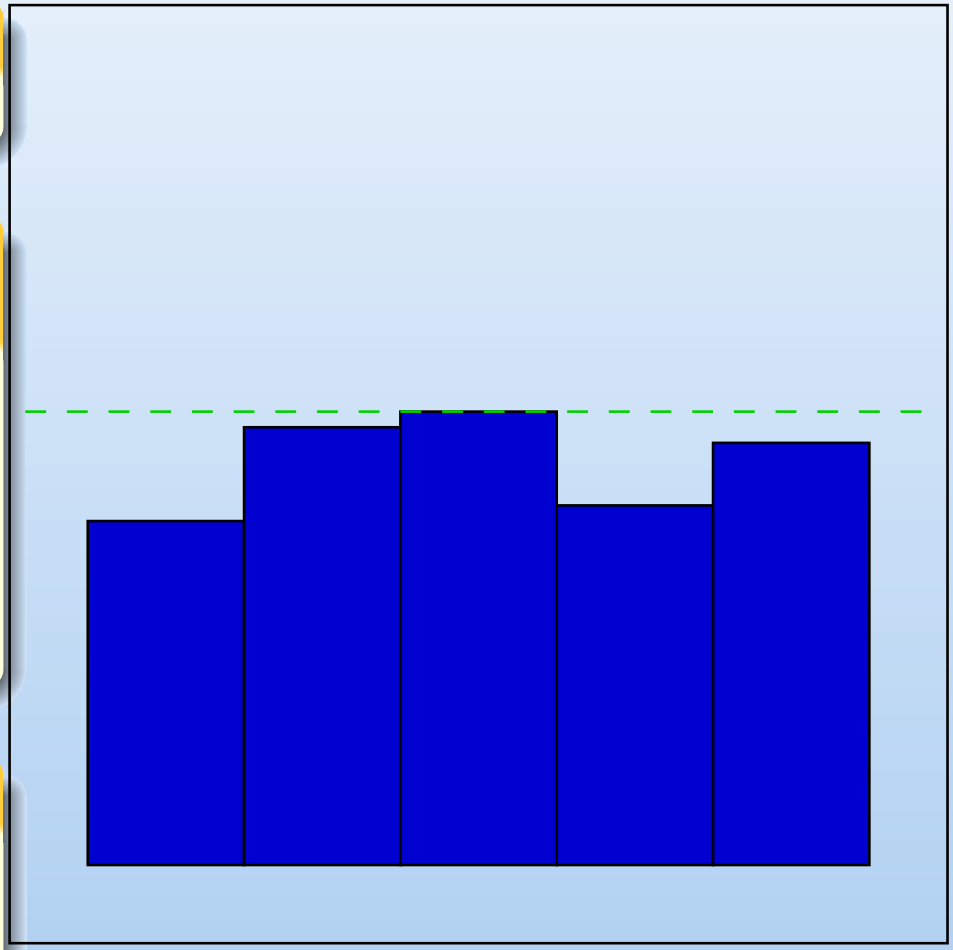
- Un vecteur V

Réduction des coefficients

1. $S \leftarrow V$
2. WHILE $\rho \geq s_i$ DO
   1. $t \leftarrow |S|_2$
   2. $S = S_1 2^{t-k_1} + S_0$
   3. $S_1 \leftarrow RED(S_1)$
   4. $S \leftarrow S_1 2^{t-k_1} + S_0$

Sortie

- Un vecteur $S \equiv V$
- Avec $s_i < \rho = 2^k$



La réduction interne *RED*

Problématique

- Entrée : Un vecteur V avec $v_i < 2^{k_1}$
- Sortie : Un vecteur S avec $s_i < 2^{k_0}$ $(k_0 < k_1)$
- Avec $V \equiv S$ dans $\mathcal{B}$: $V(\gamma) \equiv S(\gamma) \pmod{p}$

Méthodes possibles

1. Particulière : Classe de moduli avec une réduction efficace.
2. Généraliste : Utilisation de table mémoire.

Une nouvelle classe de moduli

La réduction interne *RED*

Entrée

- Un vecteur V avec $v_i < 2^{k_1}$ et $k_1 = k + t$

Algorithme *RED*

1. $V = \overline{V}2^k + \underline{V} \iff V = \overline{V}2^k Id + \underline{V}$
2. $S \leftarrow \overline{V}M + \underline{V}$, où $M \equiv 2^k Id$ dans $\mathcal{B}$

Sortie

- Un vecteur $S \equiv V$ dans $\mathcal{B}$
- Avec $s_i < 2^{k_0}$ et $k_0 = k + 1$

Comment trouver $M \equiv 2^k I$?

Écriture de 2^k dans $\mathcal{B} = (p, n, \gamma, \rho)$

- Un vecteur ξ représentant 2^k dans $\mathcal{B}$ avec ξ_i "petit".
- $2^k \equiv \xi_{n-1}\gamma^{n-1} + \xi_{n-2}\gamma^{n-2} \cdots + \xi_1\gamma + \xi_0 \pmod{p}$
- $\gamma^n \equiv c \pmod{p}$

Comment trouver $M \equiv 2^k I$?

Écriture de 2^k dans $\mathcal{B} = (p, n, \gamma, \rho)$

- Un vecteur ξ représentant 2^k dans $\mathcal{B}$ avec ξ_i "petit".
- $2^k \equiv \xi_{n-1}\gamma^{n-1} + \xi_{n-2}\gamma^{n-2} \cdots + \xi_1\gamma + \xi_0 \pmod{p}$
- $\gamma^n \equiv c \pmod{p}$

Construction de M

$$\begin{pmatrix} 2^k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2^k \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \quad (1)$$

Comment trouver $M \equiv 2^k I$?

Écriture de 2^k dans $\mathcal{B} = (p, n, \gamma, \rho)$

- Un vecteur ξ représentant 2^k dans $\mathcal{B}$ avec ξ_i "petit".
- $2^k \equiv \xi_{n-1}\gamma^{n-1} + \xi_{n-2}\gamma^{n-2} \cdots + \xi_1\gamma + \xi_0 \pmod{p}$
- $\gamma^n \equiv c \pmod{p}$

Construction de M

$$\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2^k \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \xi_{n-1} & \xi_{n-2} & \cdots & \xi_1 & \xi_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Comment trouver $M \equiv 2^k I$?

Écriture de 2^k dans $\mathcal{B} = (p, n, \gamma, \rho)$

- Un vecteur ξ représentant 2^k dans $\mathcal{B}$ avec ξ_i "petit".
- $2^k \equiv \xi_{n-1}\gamma^{n-1} + \xi_{n-2}\gamma^{n-2} \cdots + \xi_1\gamma + \xi_0 \pmod{p}$
- $\gamma^n \equiv c \pmod{p}$

Construction de M

$$\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2^k \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \xi_{n-2} & \xi_{n-3} & \cdots & \xi_0 & c\xi_{n-1} \\ \xi_{n-1} & \xi_{n-2} & \cdots & \xi_1 & \xi_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Comment trouver $M \equiv 2^k I$?

Écriture de 2^k dans $\mathcal{B} = (p, n, \gamma, \rho)$

- Un vecteur ξ représentant 2^k dans $\mathcal{B}$ avec ξ_i "petit".
- $2^k \equiv \xi_{n-1}\gamma^{n-1} + \xi_{n-2}\gamma^{n-2} \cdots + \xi_1\gamma + \xi_0 \pmod{p}$
- $\gamma^n \equiv c \pmod{p}$

Construction de M

$$\begin{pmatrix} 2^k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2^k \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \xi_0 & c\xi_{n-1} & \cdots & c\xi_2 & c\xi_1 \\ \xi_1 & \xi_0 & \cdots & c\xi_3 & c\xi_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \xi_{n-2} & \xi_{n-3} & \cdots & \xi_0 & c\xi_{n-1} \\ \xi_{n-1} & \xi_{n-2} & \cdots & \xi_1 & \xi_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Un exemple de Réduction Interne

Entrée

- $\mathcal{B} = (p = 250043, n = 3, \gamma = 127006, \rho = 128)$ avec $\gamma^n \equiv 2$
- $\gamma^3 = 2 \bmod p$ et $2^6 = 1 + \gamma^2 \bmod p$

$$\begin{pmatrix} 2^6 & 0 & 0 \\ 0 & 2^6 & 0 \\ 0 & 0 & 2^6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

- Un vecteur $V = [22, 444, 120]$ avec $V_i < 2^9$

RED

1. $V = [0, 6, 1]2^6 + [22, 60, 56]$
2. $S \leftarrow [0, 6, 1]M + [22, 60, 56] = [12, 8, 1] + [22, 60, 56]$

Sortie

$S = [57, 68, 34]$ avec $S_i < 2^{k+1} = 2^7 = 128$

Un exemple de Réduction de Coefficients

Entrée

- $\mathcal{B} = (\gamma = 127006, \rho = 128, n = 3, P = 250043)$ avec $\gamma^n \equiv 2$
- $V = [6492, 16984, 5373]$

Étape

1. $S = [2524, 984, 1853]$
2. $S = [532, 544, 357]$
3. $S = [32, 56, 121]$

Sortie

$S = [32, 56, 121]$ avec $s_i < 128$

Création d'un classe de moduli efficace

Un système de représentation adapté : $\mathcal{B} = (p, n, \gamma, \rho)$

1. Le modulo p
2. Le nombre de chiffres n
3. La base γ
4. Le majorant des chiffres ρ

Création d'un modulo p et du système $\mathcal{B}$ correspondant

- En fonction de la taille des chiffres $(32, 64 \dots)$, nous déduisons n.
- Nous voulons $c = -2, -1, 2$.
- Nous voulons $\|\xi\|_\infty = 1, 2$.
- Construire M avec ξ et c.
- Nous savons que $p | det(2^k Id - M)$
- Nous en déduisons p tel que p premier et $p \sim 2^{kn}$
- Calculer γ racine $\gcd(X^n - c, 2^k - \xi(X)) \bmod p$

Un exemple de système de représentation

Exemple

- Taille des chiffres, 32 bits et taille du modulo, 256 bits $\Rightarrow n = 8$
- $c = 2$
- $\xi = [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1]$ $(\xi(X) = X^5 + 1)$
- $p = 115792089021636622621247151603347568778042453869806330200410359523598128905 93$
  p est premier et $p \sim 2^{256}$
- γ racine $\gcd(X^8 - 2, 2^{32} - X^5 - 1) \pmod p$
  $\gamma = 144740111277045777827655893952245323141792170589214883950498277337595903999 96$

Un exemple de système de représentation

Exemple

- Taille des chiffres, 32 bits et taille du modulo, 256 bits $\Rightarrow n = 8$
- $c = 2$
- $\xi = [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1]$ $(\xi(X) = X^5 + 1)$
- $p = 115792089021636622262124715160334756877804245386980633020041035952359812890593$
  p est premier et $p \sim 2^{256}$
- γ racine $\gcd(X^8 - 2, 2^{32} - X^5 - 1) \pmod p$
  $\gamma = 144740111277045777827655893952245323141792170589214883950498277337595903999 96$

Propriété de la classe

1. Généralisation : elle contient les classes de la "famille des nombres de Mersenne".
2. Bonne densité : elle contient de nouveau moduli.
3. Grande efficacité : coût inférieur et parallélisation.

Proposition pour la cryptographie

Moduli				Coût en additions k bits			
$\mathcal{B}$	$\lvert p\rvert$	n	k	RedExt	RedInt	Total	Gain
$\mathcal{B}_{128}$	128	4	32	6	8	14	-26%
$\mathcal{B}_{160}$	160	5	32	8	10	18	-10%
$\mathcal{B}_{192_a}$	192	6	32	10	$12+6$	28	$+17\%$
$\mathcal{B}_{192_b}$	192	6	32	10	12	22	-8%
$\mathcal{B}_{224}$	224	7	32	12	14	26	$-11,5\%$
$\mathcal{B}_{256}$	256	8	32	14	16	30	-50%
$\mathcal{B}_{288_a}$	288	9	32	36	14	50	
$\mathcal{B}_{288_b}$	288	9	32	16	18	34	
$\mathcal{B}_{320_a}$	320	10	32	36	11	47	
$\mathcal{B}_{320_b}$	320	10	32	18	20	38	
$\mathcal{B}_{352}$	352	11	32	20	22	42	
$\mathcal{B}_{384_a}$	384	12	32	54	19	73	-13%
$\mathcal{B}_{384_b}$	384	12	32	22	24	46	-45%
$\mathcal{B}_{384_c}$	384	12	32	22	24	46	-45%
$\mathcal{B}_{416}$	416	13	32	24	26	50	
$\mathcal{B}_{448_a}$	448	14	32	26	28	54	
$\mathcal{B}_{448_b}$	448	14	32	26	28	54	
$\mathcal{B}_{480_a}$	480	15	32	28	30	58	
$\mathcal{B}_{480_b}$	480	15	32	56	16	78	
$\mathcal{B}_{512}$	512	16	32	30	32	62	

Cas général

Les Réseaux Euclidiens

Minkowski, 1896

Définition d'un réseau euclidien

- Un réseau $\mathcal{L}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires entières de d vecteurs $\mathbf{b}_i$ indépendants de $\mathbb{R}^n$ avec $d \leq n$:

$$\mathcal{L} = \mathbb{Z}\,\mathbf{b}_1 + \cdots + \mathbb{Z}\,\mathbf{b}_d = \{\lambda_1\mathbf{b}_1 + \cdots + \lambda_d\mathbf{b}_d \ : \ \lambda_i \in \mathbb{Z}\}$$

- d est la dimension.
- $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d)$ est une *base*.

"SVP" : Le problème du plus court vecteur

- NP-Dur
- Approximation de SVP par LLL (Lenstra, Lenstra, Lovasz), 1982

"CVP" : Le problème du plus proche vecteur

- NP-Dur
- Approximation de CVP par Babai, 1986

Exemple

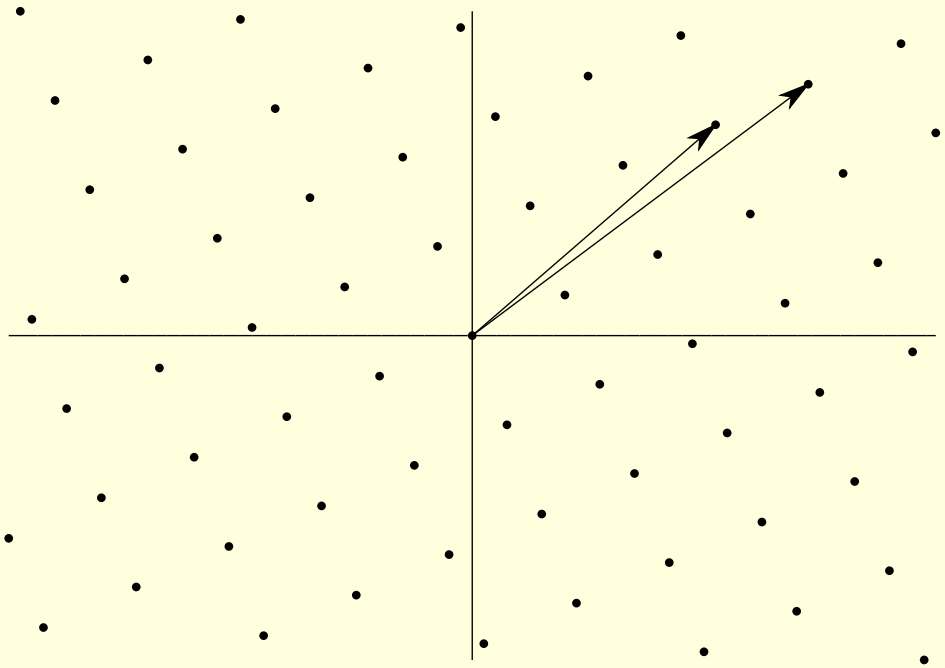
Un réseau $\mathcal{L}$

Exemple

Un réseau $\mathcal{L}$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 29 & 31 \\ 21 & 26 \end{pmatrix} \tag{3}$$

"SVP" : Le problème du plus court vecteur

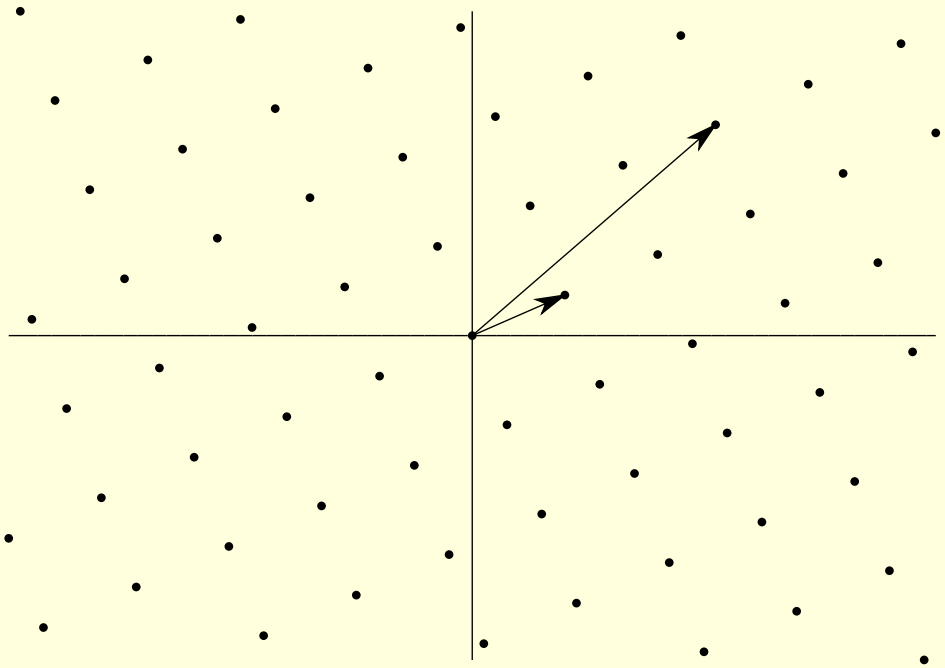


Exemple

Un réseau $\mathcal{L}$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 21 & 26 \end{pmatrix} \tag{4}$$

"SVP" : Le problème du plus court vecteur

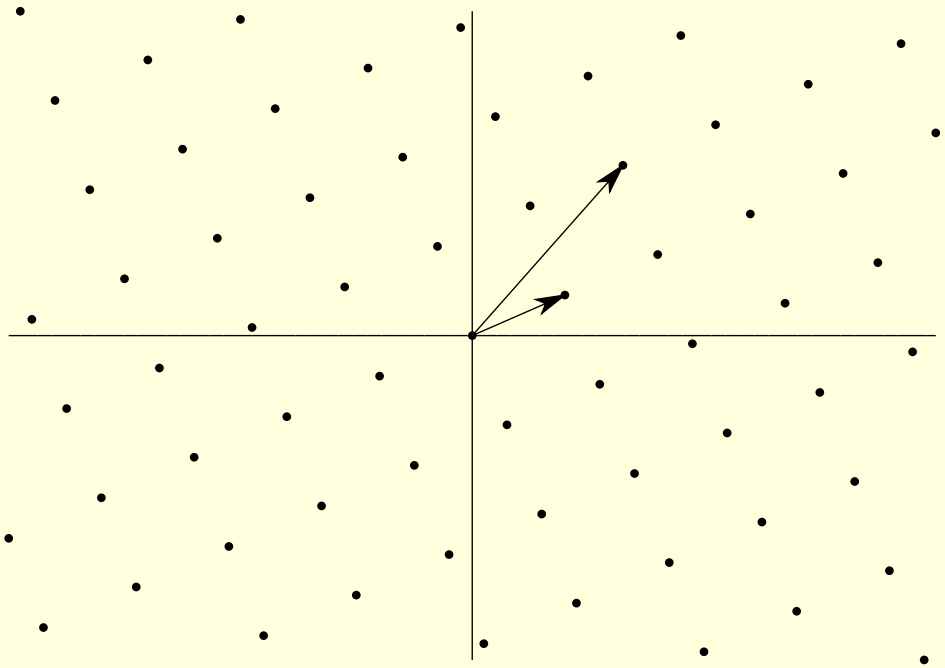


Exemple

Un réseau $\mathcal{L}$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 13 & 21 \end{pmatrix} \tag{5}$$

"SVP" : Le problème du plus court vecteur

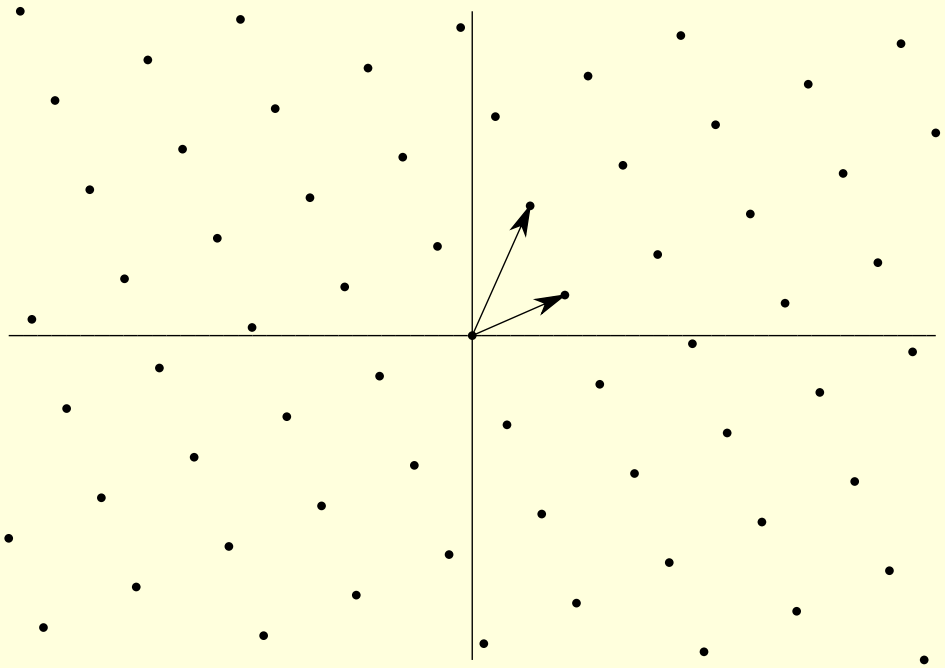


Exemple

Un réseau $\mathcal{L}$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix} \tag{6}$$

"SVP" : Le problème du plus court vecteur



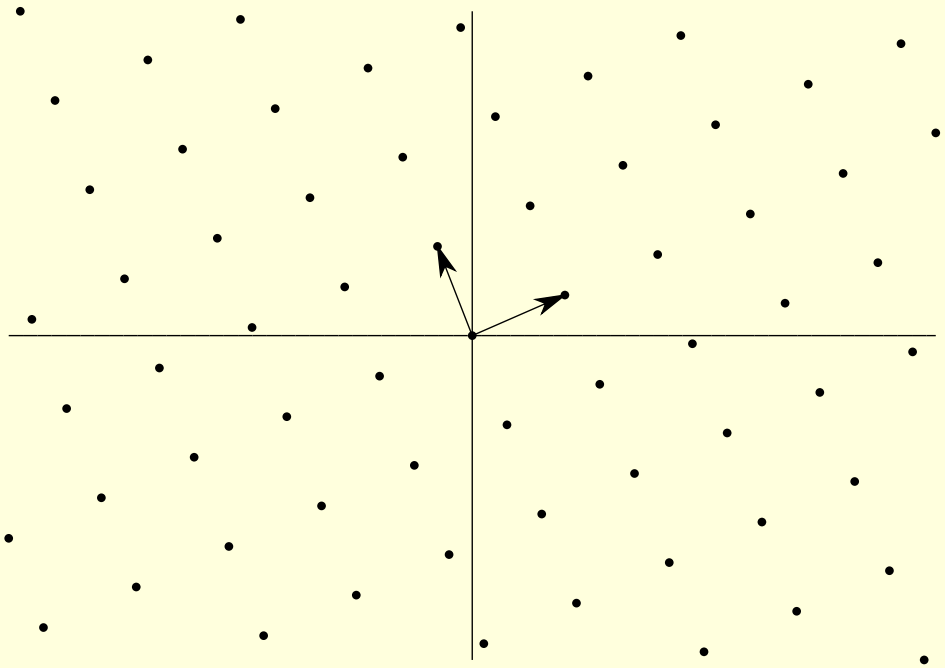
Exemple

Un réseau $\mathcal{L}$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Le plus court vecteur : $(8, 5)$.

"SVP" : Le problème du plus court vecteur



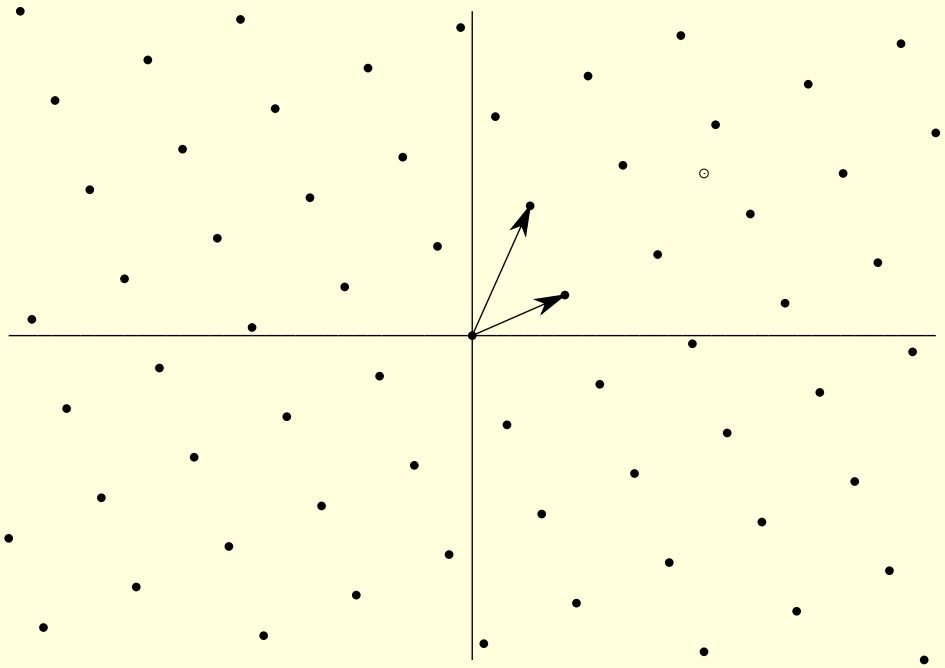
Exemple

Un réseau $\mathcal{L}$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Le plus court vecteur : $(8, 5)$.
Le plus proche vecteur : $(20, 20) \equiv (20, 20) \pmod{\mathcal{L}}$

"CVP" : Le problème du plus proche vecteur



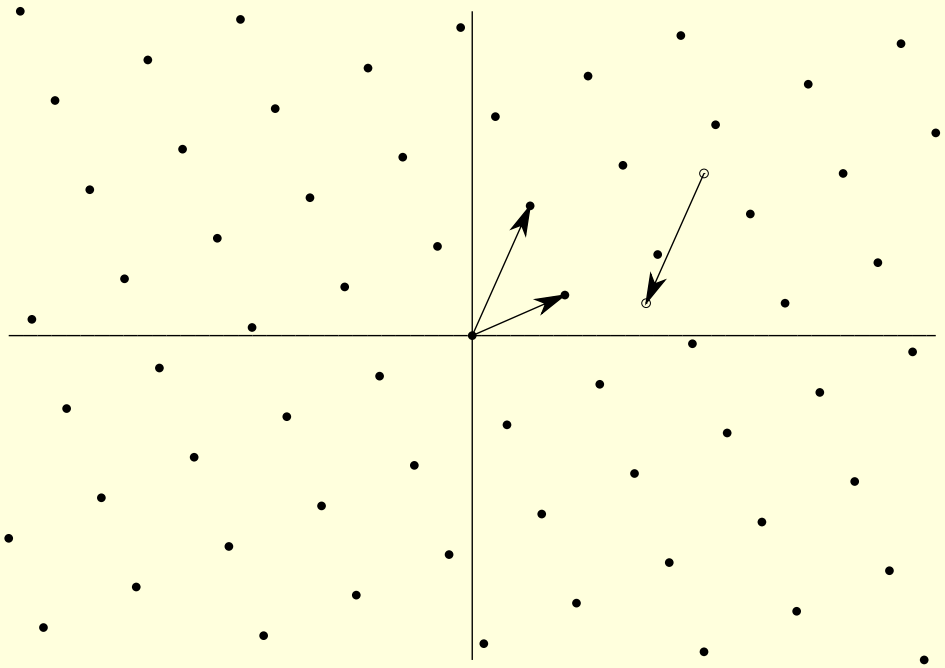
Exemple

Un réseau $\mathcal{L}$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Le plus court vecteur : $(8, 5)$.
Le plus proche vecteur : $(20, 20) \equiv (15, 4) \pmod{\mathcal{L}}$

"CVP" : Le problème du plus proche vecteur



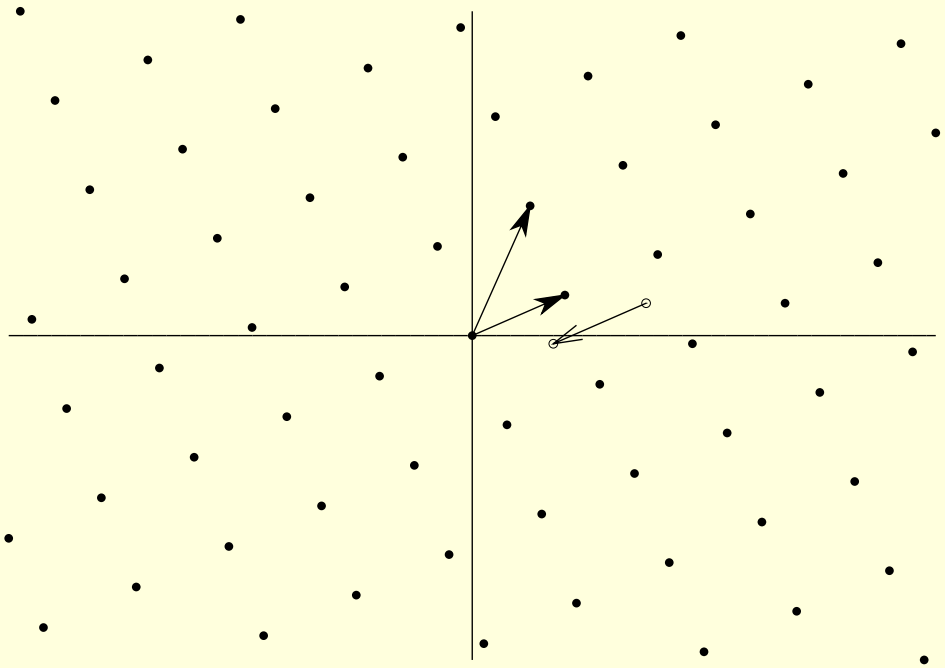
Exemple

Un réseau $\mathcal{L}$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Le plus court vecteur : $(8, 5)$.
Le plus proche vecteur : $(20, 20) \equiv (7, -1) \pmod{\mathcal{L}}$

"CVP" : Le problème du plus proche vecteur



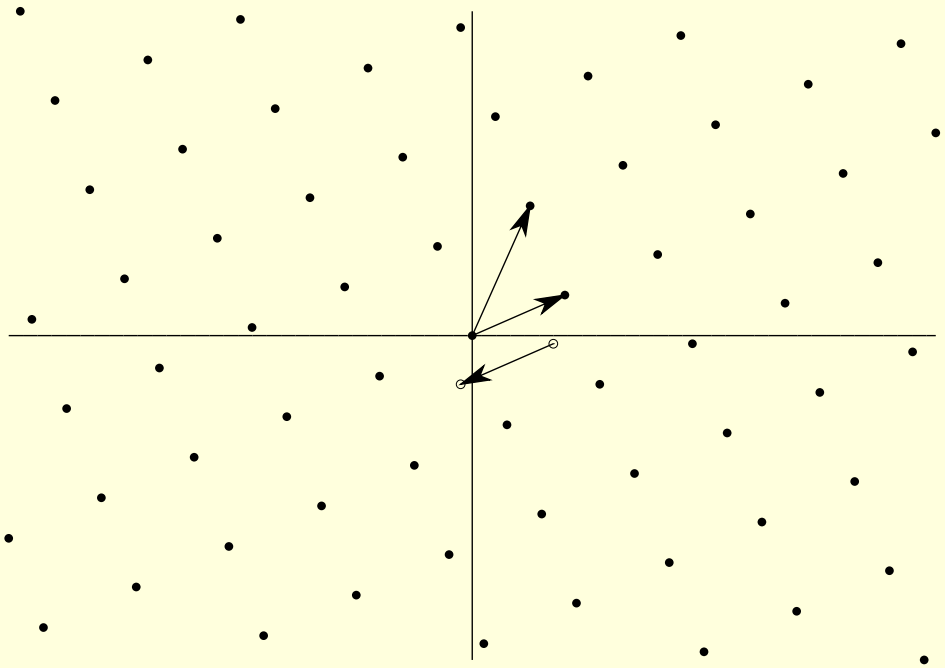
Exemple

Un réseau $\mathcal{L}$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Le plus court vecteur : $(8, 5)$.
Le plus proche vecteur : $(20, 20) \equiv (-1, 6) \pmod{\mathcal{L}}$

"CVP" : Le problème du plus proche vecteur



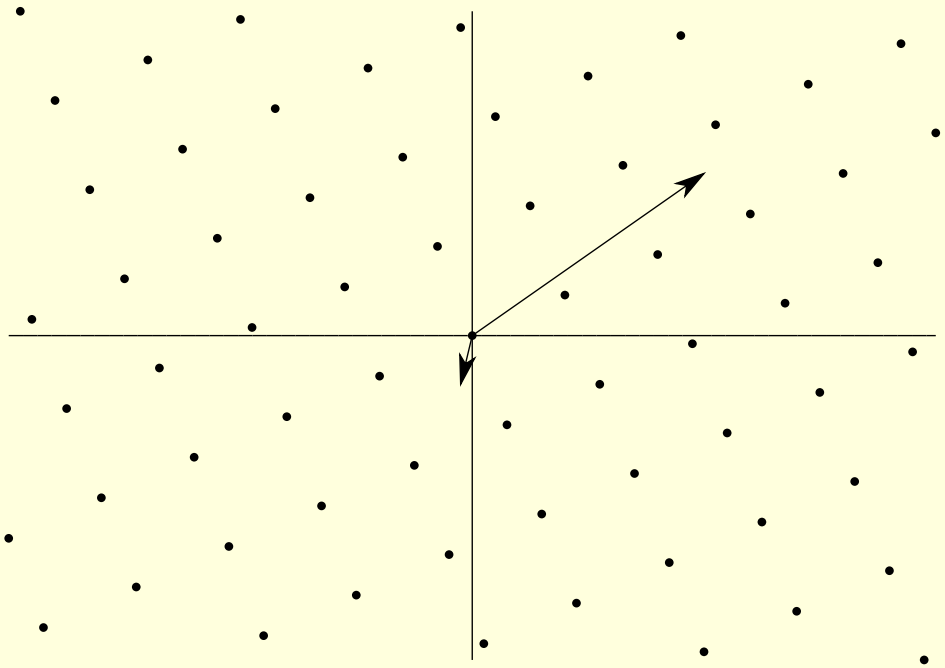
Exemple

Un réseau $\mathcal{L}$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Le plus court vecteur : $(8, 5)$.
Le plus proche vecteur : $(20, 20) \equiv (-1, 6) \pmod{\mathcal{L}}$

"CVP" : Le problème du plus proche vecteur



Les Réseaux Euclidiens

Redéfinition de la réduction des coefficients

- Entrée : Un vecteur V de $\mathbb{Z}^n$
- Sortie : Un vecteur S de $\mathbb{Z}^n$ plus "court" pour la norme $\|.\|_\infty$
- Avec $V \equiv S \mod \mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est l'ensemble des vecteurs représentant 0 (Si $V(\gamma) \equiv 0 \mod p$ alors $V \in \mathcal{L}$)
- Approximation CVP_∞ sur des réseaux totaux.

Les Réseaux Euclidiens

Redéfinition de la réduction des coefficients

- Entrée : Un vecteur V de $\mathbb{Z}^n$
- Sortie : Un vecteur S de $\mathbb{Z}^n$ plus "court" pour la norme $\|.\|_\infty$
- Avec $V \equiv S \mod \mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est l'ensemble des vecteurs représentant 0 (Si $V(\gamma) \equiv 0 \mod p$ alors $V \in \mathcal{L}$)
- Approximation CVP_∞ sur des réseaux totaux.

Théorème

- Si $X^n - c$ irréductible dans $\mathbb{Z}$ alors

$$\rho_{min} \leq |c| p^{\frac{1}{n}}$$

- $\mathcal{B} = (p, n, c^{1/n}, |c| p^{\frac{1}{n}})$ est un système de représentation modulaire.

Preuve du théorème

Le réseau $\mathcal{L}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \tag{8}$$

Preuve du théorème

Le réseau $\mathcal{L}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \tag{8}$$

Preuve du théorème

Le réseau $\mathcal{L}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p \end{pmatrix} \tag{8}$$

Preuve du théorème

Le réseau $\mathcal{L}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p \end{pmatrix} \tag{8}$$

Preuve du théorème

Le réseau $\mathcal{L}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\gamma^{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\gamma^{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p \end{pmatrix} \tag{8}$$

Preuve du théorème

Le réseau $\mathcal{L}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\gamma^{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\gamma^{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p \end{pmatrix} \tag{8}$$

Analyse du réseau $\mathcal{L}$

- Le déterminant $Det(\mathcal{L}) = p$ et la dimension $d = n$
- Théorème de Minkowski $\Rightarrow \exists \mathbf{m} \in \mathcal{L}$ tel que $\|\mathbf{m}\|_\infty \leq p^{1/n}$
- $\|(m_{n-1}, m_{n-2}, \ldots, m_1, m_0)\|_\infty \leq p^{1/n}$

Preuve du théorème

Le réseau $\mathcal{L}'$

$$\mathbf{B'} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \tag{9}$$

Preuve du théorème

Le réseau $\mathcal{L}'$

$$\mathbf{B'} = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ m_{n-1} & m_{n-2} & \cdots & m_1 & m_0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Preuve du théorème

Le réseau $\mathcal{L}'$

$$\mathbf{B'} = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ m_{n-2} & m_{n-3} & \cdots & m_0 & cm_{n-1} \\ m_{n-1} & m_{n-2} & \cdots & m_1 & m_0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Preuve du théorème

Le réseau $\mathcal{L}'$

$$\mathbf{B'} = \begin{pmatrix} m_0 & cm_{n-1} & \cdots & cm_2 & cm_1 \\ m_1 & m_0 & \cdots & cm_3 & cm_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ m_{n-2} & m_{n-3} & \cdots & m_0 & cm_{n-1} \\ m_{n-1} & m_{n-2} & \cdots & m_1 & m_0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Preuve du théorème

Le réseau $\mathcal{L}'$

$$\mathbf{B'} = \begin{pmatrix} m_0 & cm_{n-1} & \cdots & cm_2 & cm_1 \\ m_1 & m_0 & \cdots & cm_3 & cm_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ m_{n-2} & m_{n-3} & \cdots & m_0 & cm_{n-1} \\ m_{n-1} & m_{n-2} & \cdots & m_1 & m_0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Analyse du réseau $\mathcal{L}'$

- $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$
- $\|\mathbf{B'}_i\|_\infty \leq |c| p^{\frac{1}{n}}$
- Si $\mathbf{B'}$ est une base alors $\forall \mathbf{v}, \exists \mathbf{u}, \mathbf{v} \equiv \mathbf{u} \pmod{\mathcal{L}}$

Conclusion

Conclusion

Système de représentation modulaire

- Une nouvelle représentation adaptée au modulaire
- Une nouvelle classe de moduli efficace pour ECC
- Des algorithmes généralistes pour RSA

Autre . . .

- Multiplications modulaire à précalculs calibrables
- Optimisation du changement de base en RNS
- Algorithmique modulaire à forte mémorisation

Perspectives

Système de représentation modulaire

- Implantation
- Étude des possibilités de parallélisation
- Interpolation

Autre . . .

- Implantation
- Étude des réseaux en norme $\|.\|_\infty$